El quinto postulado de Euclides... y la geometría del universo

Vicente Trigo Aranda

Trescientos años antes de nuestra era surgió una figura que destaca sobremanera en el panorama científico de aquella época... y también en la de decena de siglos posteriores: Euclides. Su principal obra, los *Elementos*, perduró durante más de dos mil años y fue el pilar fundamental de la ciencia occidental... y no sólo porque incluyera gran parte del saber geométrico sino, sobre todo, porque es un paradigma de argumentación y precisión científica.

Las altísimas cotas de formalismo y rigor expositivo alcanzadas por Euclides sólo fueron superadas en el siglo XX. ¡Ahí queda eso! Piense que en unos pocos siglos Einstein superó a Newton y supongo que no pasará mucho tiempo antes de que la teoría de la relatividad pase al baúl de los recuerdos... ¡y Euclides fue la referencia científica por antonomasia durante más de dos mil años!

Para hacerse una idea de su importancia, baste decir que los *Elementos* han sido, tras la Biblia, el libro de mayor difusión en Occidente... y hasta el siglo XIX fue seguido como libro de texto en gran número de universidades de todo el mundo.

Pero la trascendencia de los *Elementos* va más allá de su gran valor científico y académico, ya que el análisis de su famoso V postulado abrió el camino a nuevas geometrías que permiten comprender mejor el universo

Figura 1. Primera edición inglesa de los Elementos de Euclides, Londres 1570

que nos rodea. La geometría euclídea, la que se enseña en colegios e institutos para entendernos, es válida a escala humana pero cuando entran en escena las medidas astronómicas su vigencia desaparece y se precisa otra geometría para describir el cosmos.

¿QUIÉN FUE EUCLIDES?

En realidad es muy poco lo que sabe con certeza sobre la vida de Euclides, por no decir nada. La mayor parte de los datos proceden de una misma fuente: un libro que escribió sobre Euclides el filósofo Proclo[1]... que vivió siete siglos después que él. Por tanto, la certeza y veracidad de los datos que siguen es algo que dejo a su consideración.

Parece ser que Euclides nació alrededor del año 325 a.C. y falleció en Alejandría hacia el 265 a.C. Es pues, posterior a Platón y Pitágoras y anterior, aunque contemporáneo, de Arquímedes y Eratóstenes.

Figura 2. Euclides... presuntamente

El gran Alejandro de Macedonia, que murió a los 33 años (323 a.C.) fundó gran número de ciudades a lo largo de sus desplazamientos guerreros y a muchas de ellas las llamó Alejandría... como ve, la originalidad y la modestia no eran valores en alza en aquellos tiempos. De entre todas las ciudades con ese nombre, históricamente la más importante fue la que erigió en Egipto, ya que allí Ptolomeo I, sucesor de Alejandro en el imperio africano, estableció (300 a.C.) la famosa Biblioteca-Museo de Alejandría.

La Biblioteca de Alejandría fue un precedente de lo que ahora se entiende por una universidad y allí confluyó todo el saber del mundo griego y oriental. Por primera vez en la historia se creó un centro de investigación científica donde los sabios de la época podían dedicar todo su tiempo a investigar y enseñar. Lógicamente, también fue lugar de peregrinación imprescindible para quien deseaba aprender y completar su formación[2]; por ejemplo, Arquímedes pasó una etapa de su vida allí.

Durante casi mil años la Biblioteca de Alejandría fue el faro que iluminó científicamente a toda su amplia zona de influencia y en el momento de su destrucción, 642 d.C., se estima que contenía más de setecientos mil volúmenes[3]. Por cierto, se habla desde hace unos años de un proyecto para erigir una nueva Biblioteca en Alejandría que recopile todo el conocimiento científico-técnico de la humanidad; sin embargo, no creo que el proyecto pase de diseñar un atractivo edificio y poco más. Hoy en día ya se dispone del equivalente a una Biblioteca de Alejandría, aunque mucho más completa. ¿Adivina cuál?... Exacto, Internet.

Figura 3. Diseño de Alejandría, obra del arquitecto griego Dinocrates

[1] Proclus Diadochus, nació el 8 de febrero de 411 en Constantinopla y murió el 17 de abril de 485 en Atenas

[2] Para más información sobre este tema, pude acudir a la siguiente dirección: http://www.perseus.tufts.edu/GreekScience/Students/Ellen/Museum.html

[3] "Sabemos que en esta biblioteca había 123 obras de Sófocles, de los que sólo siete han llegado a nuestra época. Una de esas de esas siete es *Edipo rey*. Lo mismo ocurrió con las obras de Esquilo, Eurípides y Aristofanes. Es un poco como si las únicas obras de un hombre llamado William Shakespeare fueran *Coriolano* y *Cuento de invierno*; aunque hubiéramos oído decir que había escrito otras obras muy alabadas en su tiempo como *Hamlet, El sueño de una noche de verano, Julio César, El rey Lear* y *Romeo y Julieta*". Carl Sagan, *Cosmos*.

Volviendo a Euclides, se supone que debía haber adquirido un cierto renombre en su Grecia natal y por ese motivo Ptolomeo lo invitó a incorporarse al claustro de profesores de la Biblioteca. En Alejandría impartió clase durante varios años y escribió unos cuantos libros, de los que sólo han llegado hasta nuestros días los *Elementos* (que comentaré detenidamente más adelante) y los *Datos*, una colección de problemas y proposiciones para determinar figuras.

De otras de sus obras sólo se tienen referencias, ya que son citadas en libros de otros autores. Así, algunos títulos atribuidos a Euclides fueron *Sobre la división de las figuras*, *Sofismas*, *Cónicas*, *Lugares superficiales*, etc. Seguramente su obra desaparecida más célebre es *Porismas* que constaba de 38 lemas y 171 teoremas y era, según Pappus, una colección de "cosas útiles para resolver los problemas más difíciles"... y no puedo menos que poner en duda lo de útiles.

¿Qué por qué la coletilla anterior? Muy sencillo, no hay que olvidar que Euclides fue fruto de su tiempo y de su educación. Una sociedad basada en la esclavitud, como era la griega de aquella época, es lógico que despreciara el trabajo manual, pues se consideraba propio de esclavos. Por esta razón las matemáticas griegas derivaron en una especie de entelequia abstracta que se emparentaba con la filosofía y que, desde luego, no debía tener ninguna utilidad si quería alcanzar un cierto reconocimiento social. Por ejemplo, en los *Elementos* no aparece ninguna aplicación práctica ni ningún ejemplo numérico... y en esa misma dirección encaja como anillo al dedo la siguiente anécdota, atribuida a Euclides.

«Un estudiante que había empezado a estudiar geometría con Euclides preguntó, al aprender el primer teorema: "¿qué ganaré aprendiendo estas cosas?". Euclides llamó a su esclavo y dijo: "dale tres monedas, puesto que debe sacar algún provecho de lo que aprende" » *Los grandes matemáticos*, Herbert Westren Turnbull.

De todas formas, tampoco está muy claro siquiera que Euclides existiera. Son tantas las referencias a sus cualidades y tan perfecto el rigor de sus *Elementos*, sin olvidar la ímproba tarea de recopilar tal cantidad de saber geométrico disperso, que parece como si una vida humana no diese para tanto y, por eso, es lógico que haya hipótesis alternativas. Quizás las dos que tengan más visos de verosimilitud sean las siguientes:

- Euclides podría haber sido lo que ahora llamaríamos un catedrático de mucho prestigio, que fundó un grupo de trabajo y todo lo que éste publicaba, incluso después de que Euclides hubiera muerto, siguió llevando el nombre del fundador del grupo.
- Un equipo de matemáticos de Alejandría podría haber publicado obras conjuntas, a lo largo de varios años, y adoptado el nombre de Euclides en honor de Euclides de Megara, un discípulo de Sócrates que tuvo cierto renombre un siglo antes.

Antes de pasar a comentarle los *Elementos*, le indico unas cuantas direcciones de Internet donde puede encontrar mucha más información sobre la vida y obra de Euclides.

http://www.obkb.com/dcljr/euclid.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euclid.html

http://www.treasure-troves.com/bios/Euclid.html

LOS ELEMENTOS

Los *Elementos* de Euclides constan de trece libros, en los cuales aparecen un total de 465 proposiciones, 372 teoremas y 93 problemas[4].

- Los primeros cuatro libros se denominan pitagóricos, pues son un compendio del saber matemático de esa escuela filosófico-matemática. En ellos se estudia geometría plana: propiedades de los triángulos y paralelogramos, teorema de Pitágoras, circunferencia y polígonos.
- Los dos siguientes están dedicados al estudio de la proporcionalidad y semejanza de polígonos.
- Los tres siguientes son los llamados aritméticos, pues están centrados en la teoría de números: divisibilidad, primos, perfectos, etc. Eso sí, entendiendo los números como segmentos; es decir, geometría pura y dura.
- El décimo libro trata de la clasificación de los irracionales... no de su cálculo, ya que eso tendría alguna utilidad práctica.
- Los tres últimos libros dan un salto y pasan a analizar la geometría del espacio (poliedros, esfe-

[4] Los *Elementos* es un texto que ha llegado hasta nosotros a través de la mano de Teón de Alejandría (siglo IV) por lo que no es descartable que haya más de una modificación con respecto al original.

ras, etc.) para finalizar con los cinco poliedros regulares que tan caros eran a la escuela platónica.

Figura 4. Fragmento de los Elementos. Manuscrito griego del siglo IX.

Pero una cosa es que los *Elementos* hayan sido sinónimo de geometría y otra muy distinta es que su lectura fuese asequible... "Un día Ptolomeo preguntó a Euclides si para aprender geometría no existía un camino más breve que el de los *Elementos*, obteniendo la respuesta: en la geometría no existe ningún camino especial para los reyes" *Historia de la Matemática*, J. Rey Pastor y José Babini.

Como puede imaginar, estoy en completo acuerdo con Euclides... pero también en desacuerdo. La geometría no dispone de atajos regios, evidentemente, pero de ahí a considerar que los *Elementos* son el mejor camino para aprender geometría media un buen trecho. Sólo una vez en mi vida me he cruzado con los *Elementos* en plan serio y puedo asegurarle que se trata de un texto de una dureza bestial, que merece cualquier calificativo menos el de didáctico.

A mí me recuerda en cierto modo a aquella moda de la matemática moderna, donde el rigor formalista anulaba los conceptos más intuitivos y fundamentales. Todavía recuerdo una pregunta que leí en un libro de texto de aquellos años: ¿Qué diferencia hay entre un número racional y una fracción?

La respuesta correcta, y así aparecía en el solucionario, es que un número racional es una clase de equivalencia en el conjunto ZxZ y una fracción es cualquier representante de dicha clase. Desde el punto de vista matemático es una respuesta perfecta, pero didácticamente no es muy adecuada... en un libro para niños de once años.

Pues algo así pasa con los *Elementos* de Euclides. Aunque formalmente sean una maravilla, seguro que han provocado más de un dolor de cabeza a millones de estudiantes... y, lo que es mucho peor, ocasionado un odio feroz a todo cuanto huela a geometría.

AXIOMAS Y POSTULADOS

Euclides se basó en la lógica aristotélica para construir un bello edificio, el de la geometría, sirviéndose del método axiomático, que es el que actualmente siguen todas las disciplinas científicas. Así, partiendo de una serie de premisas previas, los axiomas, y auxiliándose exclusivamente en razonamientos lógicos, Euclides fue deduciendo una serie de resultados encadenados.

Euclides comenzó los *Elementos* definiendo una serie de axiomas generales, aplicables a cualquier tipo de razonamiento... Como puede apreciar, no son nada del otro mundo.

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si a cosas iguales se sustraen cosas iguales, las diferencias son iguales.
4. Si a cosas desiguales se añaden cosas iguales, los totales son desiguales.
5. Las cosas dobles de una misma cosa son iguales.
6. Las mitades de una misma cosa son iguales.
7. Cosas que pueden superponerse una a la otra son iguales.
8. El todo es mayor que su parte.

A continuación Euclides especificó una serie de axiomas particulares de la ciencia a estudiar, los denominados postulados. Él consideró los cinco siguientes:

I. Por dos puntos distintos pasa una recta.
II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
III. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
V. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado.

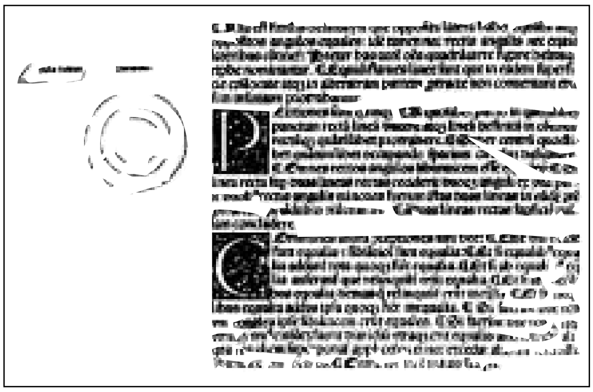

Figura 5. Los cinco postulados en una edición de los Elementos de 1482.

Nunca dejará de sorprenderme la finura y el rigor de Euclides con respecto a su celebérrimo V postulado. Si observa atentamente los cinco, es evidente que el V es de una índole distinta a los cuatro anteriores: es más complicado y su redacción recuerda más a la de un teorema que a la de un axioma.

Por ese motivo a lo largo de la historia se invirtió muchísimo trabajo en intentar demostrar precisamente eso: que el V postulado es realmente un teorema y, por tanto, puede demostrarse a partir de los cuatro primeros postulados. De hecho, el propio Euclides no utilizó el quinto hasta después de haber deducido 29 proposiciones, por lo que puede sospecharse que él mismo no estaba muy seguro de su evidencia.

Seguidamente veremos los principales trabajos relacionados con el V postulado, que finalmente dieron lugar a las geometrías no euclídeas.

ATAQUES AL QUINTO POSTULADO

El primer intento serio del que se tienen noticias llegó de la mano del ya citado Proclo, que creyó haber conseguido demostrar que el V postulado es un teorema, deducible de los cuatro postulados anteriores. Su error fue basarse en una de las dos suposiciones siguientes que es, en realidad, son equivalentes al V postulado:

> “Toda recta que corte a una de dos rectas paralelas corta también a la otra”

> “Una recta paralela a una dada dista de ella una longitud constante”

Más de mil años después John Wallis, autor de *Arithmetica infinitorum*, pensó que había demostrado por fin el V postulado. De nuevo partía de una premisa que resulta equivalente a él:

“Existen triángulos semejantes no iguales”

Figura 6. John Wallis, 23 Nov 1616 (Ashford) - 28 Oct 1703 (Oxford)

Habrá observado que hay varias expresiones equivalentes al V postulado (y todavía le indicaré alguna otra), pero la más difundida se debió al matemático escocés John Playfair (1748-1819) que la expuso en 1795. Tan es así que en muchos textos esta versión es la que se expone como V postulado de Euclides:

> “Desde un punto exterior a una recta se puede trazar una, y sólo una, paralela a la misma”

SACCHERI CASI LO CONSIGUE

El problema del V postulado estuvo a punto de resolverlo en el siglo XVIII el matemático y jesuita italiano Giovanni Saccheri (1667-1733) En su libro *Eucli-*

des ab omni naevo vindicatus Saccheri aplicó el método de reducción al absurdo para intentar probar que el V postulado de Euclides se puede deducir de los anteriores.

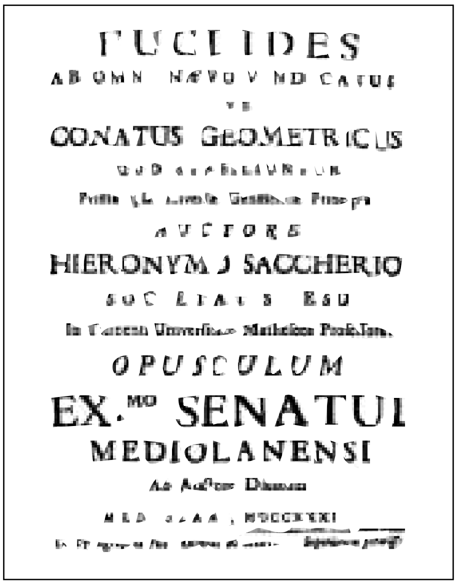
CONATUS GEOMETRICUS
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI

Figura 7. Euclides exonerado de todo error, 1733

Saccheri partió de un cuadrilátero birrectangular isósceles ABCD, en el que los lados AD y BC eran iguales y los ángulos A y B rectos, y demostró, basándose sólo en los cuatro primeros postulados, que los ángulos C y D deben ser iguales. Llegado a este punto, analizó las tres posibilidades que se le ofrecían: esos dos ángulos son rectos, obtusos o agudos.

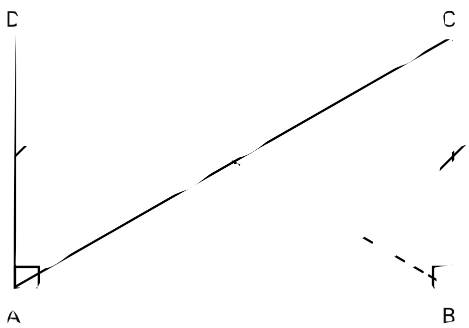

Figura 8. Cuadrilátero de Saccheri

En primer lugar demostró la equivalencia entre el V postulado de Euclides y la condición de que ambos ángulos sean rectos. Por tanto, su trabajo se encaminó a comprobar que si los ángulos son obtusos o agudos se contradice alguno de los cuatro primeros postulados.

Buscando estas incoherencias, Saccheri demostró más de 30 proposiciones, alguna de ellas de indudable dificultad, que conforman en realidad el primer tratado de las geometrías no euclídeas. Consiguió “demostrar” que la hipótesis de ángulos obtusos es contradictoria, basándose en que la longitud de una recta es infinita (lo que no se recoge en ningún postulado de Euclides), pero no logró encontrar ninguna contradicción en la hipótesis de ángulos agudos.

En resumen, Saccheri encontró resultados que parecían contradecir el sentido común y dio por concluida su obra, sin percatarse de que lo antiintuitivo no tiene necesariamente que ser antilógico ni antinatural. Por tanto, Saccheri tuvo al alcance de la mano la creación de las geometrías no euclídeas, pero no lo consiguió debido a que estaba absolutamente convencido de que sólo podía existir la geometría euclídea.

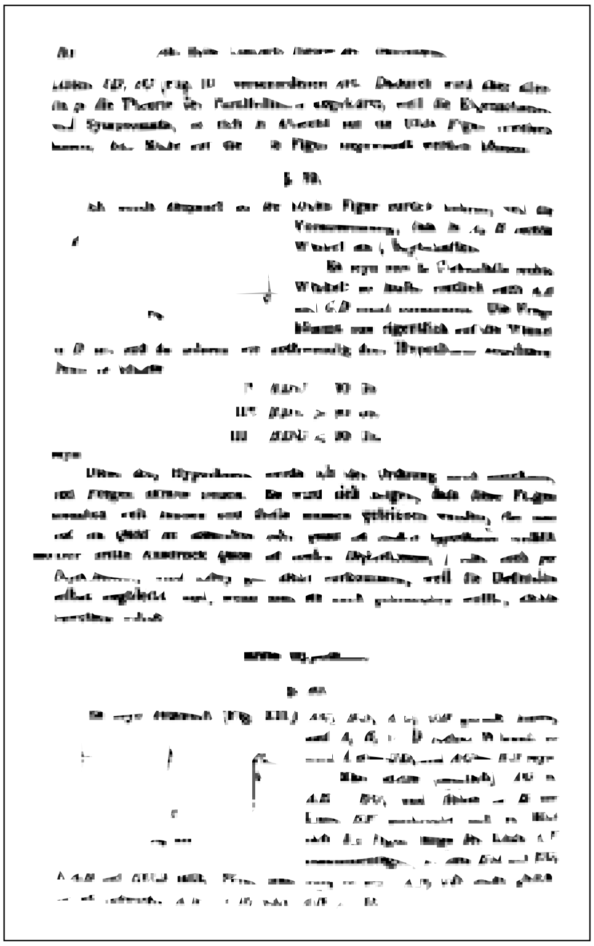

Figura 9. Una página de Die teorie der parallellínien

Unos años más tarde, en 1763, el matemático Georg S. Klügel (1739-1812) introdujo en su tesis doctoral una novedosa idea: el V postulado está basado en la experiencia, no en la evidencia. Además, observó que Saccheri no había encontrado ningún absurdo sino sólo una serie de resultados aparentemente extraños.

Siguiendo este camino, el matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777) intentó probar que el V postulado era independiente de los demás. En su obra *Die teorie der parallellínien*, escrita en 1766 y publicada en 1786, sigue un razonamiento análogo al de Saccheri: construye un cuadrilátero formado por tres ángulos rectos y analiza las hipótesis de recto, obtuso y agudo para el restante ángulo, buscando alguna contradicción, que claro está no encontró. De hecho, el propio Lambert insinuó la posibilidad de introducir un postulado alternativo al V de Euclides e incluso indicó que la geometría esférica era independiente del postulado de las paralelas.

Por último, antes de pasar al nacimiento de las geometrías no euclídeas, no puedo dejar de citar la siguiente anécdota, atribuida al matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Había preparado una conferencia ante la Academia Francesa en la que pensaba dejar totalmente resuelto el problema del V postulado y, justo al empezar su exposición, se quedó un momento pensativo y dijo su célebre frase "Il faut que j'y songe encore", tras lo cual recogió sus papeles y dio por terminada la conferencia.

BOLYAI Y EL NACIMIENTO DE UNA NUEVA GEOMETRÍA

Janos Bolyai (1802-1860) fue oficial del ejército húngaro y era hijo del matemático Farkas Bolyai, que había sido compañero de Gauss y con él que mantenía correspondencia a pesar de trabajar en un pequeño colegio. Gracias a eso conocemos que, en 1799, Gauss le indicaba: "el camino elegido no conduce en absoluto a deducir el axioma de las paralelas, que me aseguráis haber alcanzado"

Su hijo Janos prosiguió los trabajos sobre el V postulado y, el 3-XI-1823, envió una carta a su padre en la que decía: "He llegado a realizar algo tan asombroso que yo mismo me hallo terriblemente azorado. Si echaras una mirada a mi trabajo verías que no exagero. Puedo asegurarte que he creado un mundo nuevo"... ¡Y tenía toda la razón del mundo!

Figura 10. Janos Bolyai, 15 Dic 1802 (Cluj) - 27 Ene 1860 (Tirgu-Mures)

Janos Bolyai partió de la hipótesis de que el V postulado era independiente de los otros cuatro y, por tanto, si se sustituía por otro no equivalente podría construirse una nueva geometría, tan coherente (es decir, sin contradicciones) como la euclídea. El suyo fue:

> "Desde un punto exterior a una recta pueden trazarse infinitas rectas paralelas a la dada"

Sin embargo, su nuevo mundo quedó en agua de borrajas y su descubrimiento no fue publicado hasta 1832... como un apéndice del libro de texto *Tentamen* de su padre. ¿Y por qué Bolyai abandonó su investigación? Pues por una razón de peso, al menos para él... alguien se le había adelantado.

Cuando Bolyai padre apreció la importancia del trabajo de su hijo, no tardó mucho en enviar una copia a Gauss, con la esperanza de que éste alabase el trabajo de Janos y así su hijo obtuviese un merecido reconocimiento en el mundo matemático. No obstante, la respuesta de Gauss le dejó helado: "elogiar la obra de tu hijo es elogiarme a mí mismo, pues coincide casi exactamente con los trabajos que he ido desarrollando en los últimos treinta años. Mi intención era no publicar estos trabajos durante mi vida"

Figura 11. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el príncipe de las Matemáticas

¿Y por qué el gran Gauss callaba su descubrimiento? Pues, aunque parezca mentira, por miedo. Según cuenta en una carta enviada a Bessel el 27 de enero de 1829, silenció sus investigaciones porque temía "el griterío de los beocios", refiriéndose a los filósofos kantianos que consideraban la geometría euclídea consustancial con la naturaleza.

LOBACHEVSKI DIFUNDE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Esa nueva geometría, que Gauss no quiso dar a conocer y que Janos Bolyai dejó abandonada, fue revelada a la comunidad científica por el matemático ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), profesor y rector de la universidad de Kazan.

Figura 12. Nikola Lobachevski, 1 Dic 1792 (Gorky) - 24 Feb 1856 (Kazan)

Lobachevski partió de la misma hipótesis que Bolyai ("desde un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas paralelas a ella") y presentó sus trabajos en dos memorias publicadas entre 1826 y 1829 en su universidad. Posteriormente publicó *Geometrie imaginaire* (1837) y *Geometrische untersuchungen zur theorie der parallelinien* (1840); por último, en 1855 cuando ya estaba ciego, publicó el compendio de toda su geometría, *Pan geometrie*.

Dada una recta y un punto exterior a ella, Lobachevski postuló de que al menos se pueden trazar dos paralelas a la recta pasando por el punto y demostró una serie de sorprendentes resultados:

- La suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180º.
- La intersección de dos planos paralelos contiene rectas paralelas entre sí.

Una vez que se probó que esta nueva geometría no euclídea (que se denominaría hiperbólica) no ofrecía ninguna contradicción, y por tanto era coherente, se buscaron modelos geométricos en los cuales pudiera aplicarse. Veamos a continuación dos de ellos.

MODELOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

El italiano Eugenio Beltrani (1835-1900) presentó en 1868 la pseudoesfera, que es la superficie engendrada al girar la curva tractriz alrededor de su asíntota. Por si no lo recuerda, le diré que la tractriz puede definirse como la trayectoria descrita por una persona que sigue a otra que se mueve en línea recta (la asíntota), cuando la distancia entre ambas permanece constante.

Sobre esta superficie pueden definirse los siguientes entes geométricos:

- Punto: un punto de la pseudoesfera.
- Línea que pasa por A y B: la curva más corta sobre la pseudoesfera que une A y B; es decir, la curva geodésica.
- Distancia entre dos puntos: longitud de la línea que los une.

Con estas definiciones, que no negaré resultan un tanto extrañas, puede demostrarse que la geometría sobre la pseudoesfera coincide con parte de la geometría hiperbólica, ya que sólo se prolongan infinitamente los segmentos del meridiano y, aún así, únicamente en un sentido de la recta.

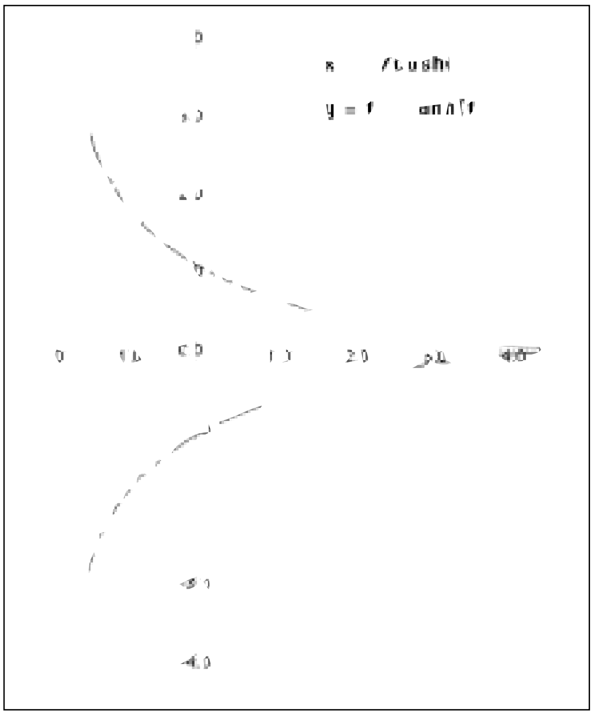

Figura 13. Gráfica de tractriz

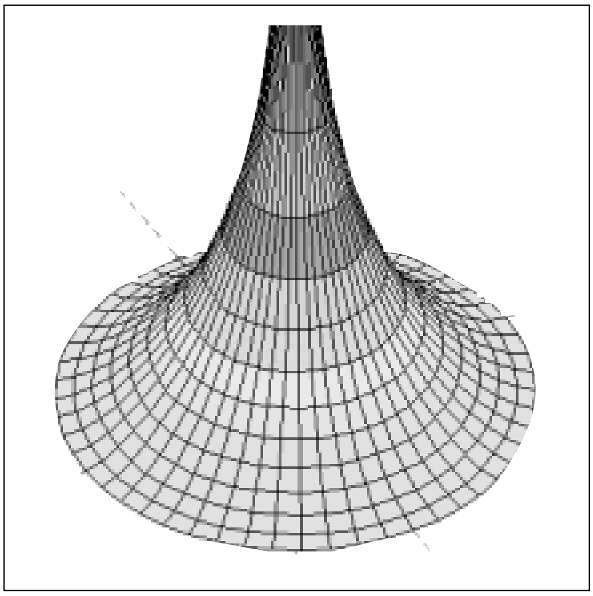

Figura 14. Mitad superior de la pseudoesfera

En 1870 el matemático alemán Félix Klein (1849-1925) dio otra interpretación real de la geometría hiperbólica sobre todo el plano y, además, ampliándola al espacio. Klein consideró un círculo euclídeo, excluyendo su circunferencia, y estableció las siguientes definiciones:

- Punto: punto del interior del círculo.
- Recta: cuerda del círculo, excluidos sus extremos sobre la circunferencia.
- Rectas paralelas: cuerdas del círculo con un mismo extremo común.
- Rectas secantes: las que se cortan en el interior del círculo.
- Rectas no secantes: las que se cortan en el exterior del círculo.
- Distancia entre los puntos P y Q: el logaritmo de [d(A,Q) x d(B,P)]/ [d(A,P) x d(B,Q)], donde A y B son los puntos de la circunferencia en que corta la prolongación de la recta que une P y Q.

Klein demostró que la geometría así construida sobre el círculo se corresponde con la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevski, satisfaciendo todos los postulados de Euclides excepto el V. Siguiendo esta misma línea, también puede construirse un modelo de geometría hiperbólica espacial; basta considerar como espacio el interior de una esfera: las rectas siguen siendo cuerdas y los planos son círculos cuya circunferencia está sobre la esfera.

LA GEOMETRÍA ELÍPTICA DE RIEMANN

Hasta ahora hemos visto dos geometrías, la euclídea y la hiperbólica, en las cuales la longitud de la recta es infinita y donde desde un punto exterior a una recta se pueden trazar una o varias paralelas, respectivamente. Sin embargo, ¿es posible definir alguna geometría donde esto no suceda? La respuesta es afirmativa, y el primero en darla fue el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866).

Figura 15. Bernhard Riemann, 17 Sept 1826 (Breselenz) - 20 Jul 1866 (Selasca)

Riemann estudió en la universidad de Gotinga donde fue alumno de Gauss, y posteriormente también lo fue de Jacobi y Dirichlet en Berlín. Para obtener su título de Privatdozent presentó, el 10-VI-1854, su obra *Ueber die hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Hipótesis en que se basa la geometría*) que dio nacimiento a la geometría elíptica... ¡y no fue publicada hasta 1868!

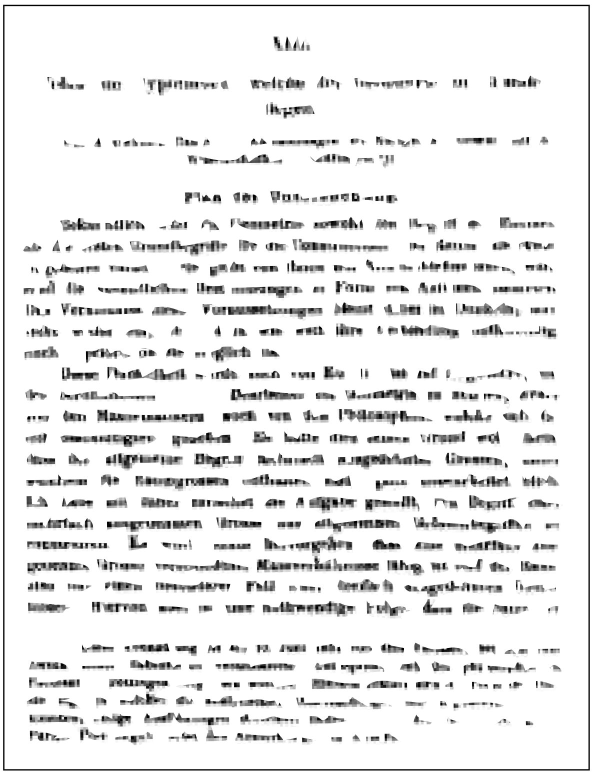

Figura 16. Primera página de Ueber die hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

Como era de esperar, en la geometría elíptica no se satisface el V postulado pero es que, además, las rectas no son infinitas sino cerradas... y, por otro lado, es muy sencillo visualizar un modelo de esta geometría elíptica. Basta considerar una esfera y definir los siguientes elementos:

- Plano: superficie esférica.
- Punto: par de puntos diametralmente opuestos en la esfera.
- Recta: círculo máximo sobre la esfera; es decir, línea geodésica.

A poco que enrede con este modelo, puede observar fácilmente los resultados de la geometría elíptica. Por ejemplo:

- Dos rectas siempre tienen un punto en común, por lo cual desde un punto exterior a una recta no es posible trazar ninguna paralela.
- Las rectas son ilimitadas pero su longitud es finita y siempre la misma.
- La suma de los ángulos de un triángulo es siempre superior a 180º.

Y, para terminar, nada mejor que una tabla que resuma todo lo visto hasta el momento:

Geometría	Desarrollada por	Paralelas desde un punto exterior	Suma ángulos de un triángulo	Las rectas son
Euclídea	Euclides	Una	180º	Infinitas
Hiperbólica	Bolyai y Lobachevski	Más de una	Menor que 180º	Infinitas
Elíptica	Riemann	Ninguna	Mayor que 180º	Finitas

¿CUÁL DE LAS TRES GEOMETRÍAS ES LA REAL?

Una vez aquí, la cuestión es saber cuál de estas tres geometrías encaja mejor con el mundo físico. Como los siglos han ido demostrando, la euclídea es totalmente válida si se trabaja con medidas a escala terrestre, pero con distancias superiores esto no es tan evidente.

Gauss y Lobachevski intentaron probar experimentalmente la validez de la geometría hiperbólica. Gauss midió los ángulos de un triángulo cuyos vértices eran las cimas de tres montañas y encontró que, como era de esperar, la suma de sus ángulos resultaba ser 180º. Lobachevski observó que un triángulo terrestre era demasiado pequeño como para permitir apreciar las diferencias, así que pretendió estudiar uno astronómico... y tampoco llegó a ningún lado, porque las diferencias en distancias Tierra-Sol son inferiores a la milésima de segundo.

Actualmente, según la teoría de la relatividad, es la geometría elíptica de Riemann la que más se ajusta a la métrica del universo. Según palabras de B. Lewis: “En la teoría general de la relatividad de Einstein, la geometría del espacio es una geometría riemanniana. La luz viaja a través de geodésicas y la curvatura del espacio es función de la naturaleza de la materia que lo compone”